1-4 點與直線的距離及直線的夾角

向量的坐標

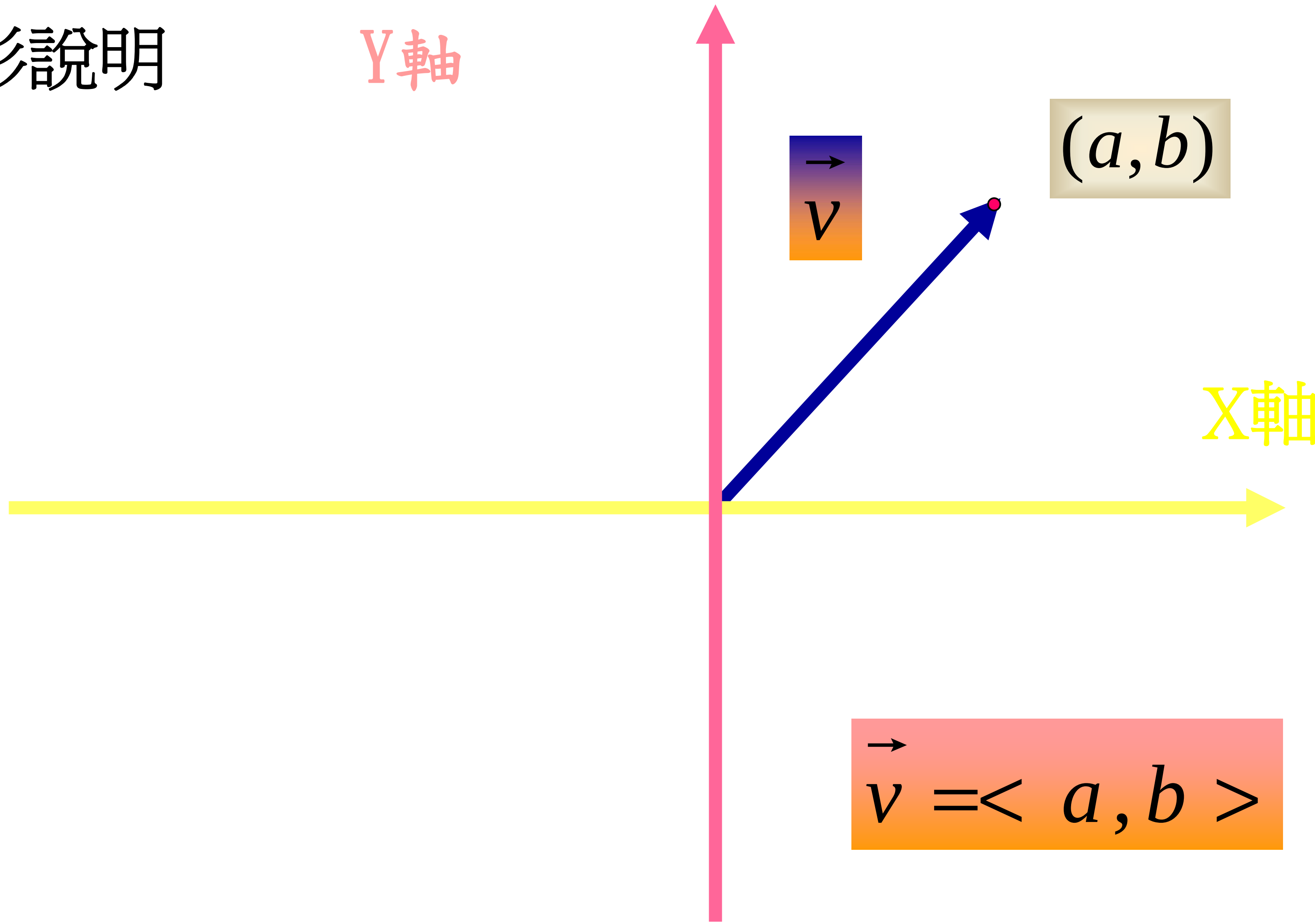
將平移向量 $\vec{v}$ 使其起點與原點重合

此時此向量終點座標若爲 (a,b)

則記 $\vec{v} = \langle a,b \rangle$

並稱 $\langle a,b \rangle$ 爲 $\vec{v}$ 的坐標

圖形說明

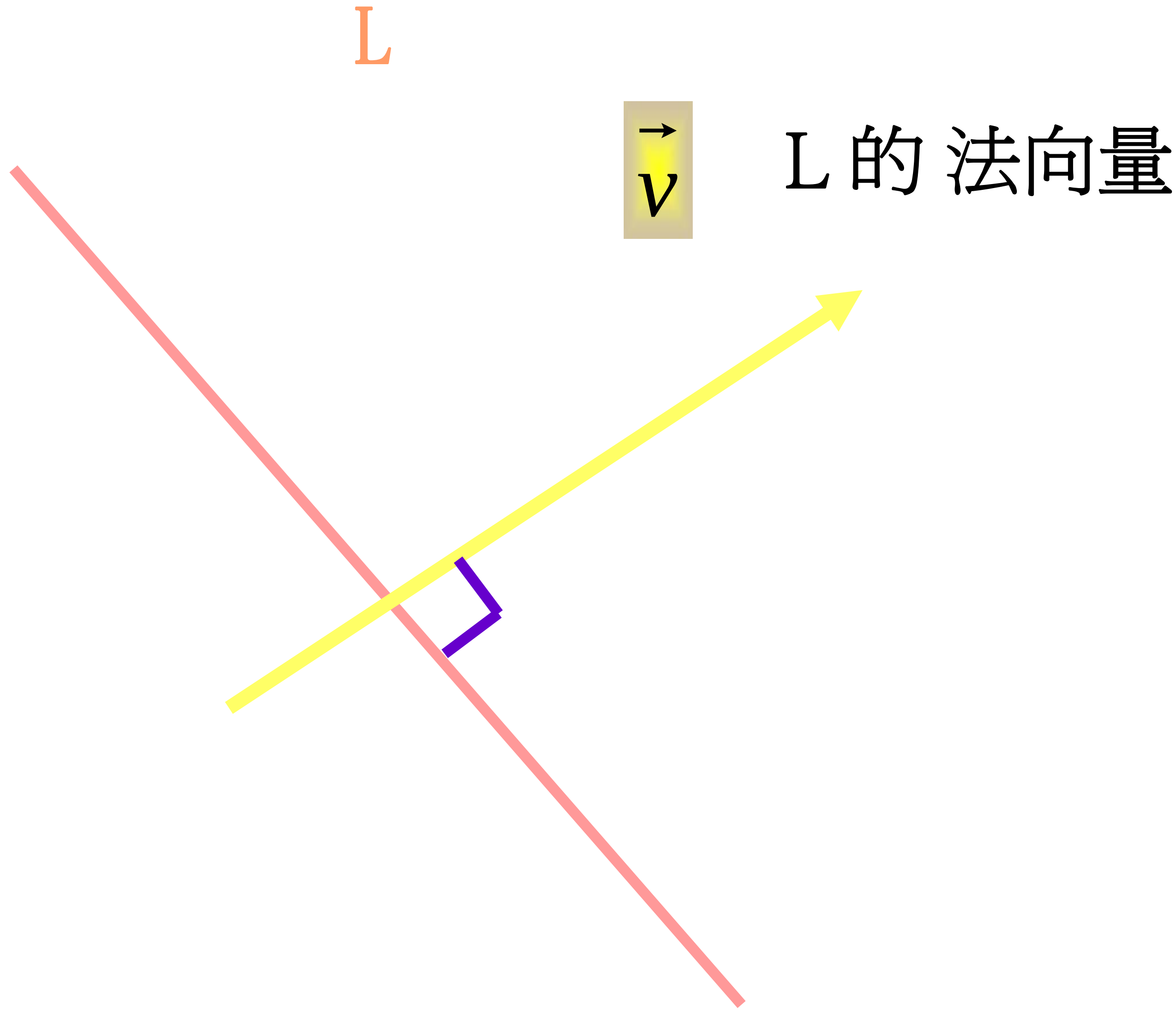


法向量的定義

若向量 $\vec{v}$ 垂直於直線 $L: ax + by + c = 0$

則稱向量 $\vec{v}$ 為直線 L 的法向量

圖形說明



$$L : ax + by + c = 0$$

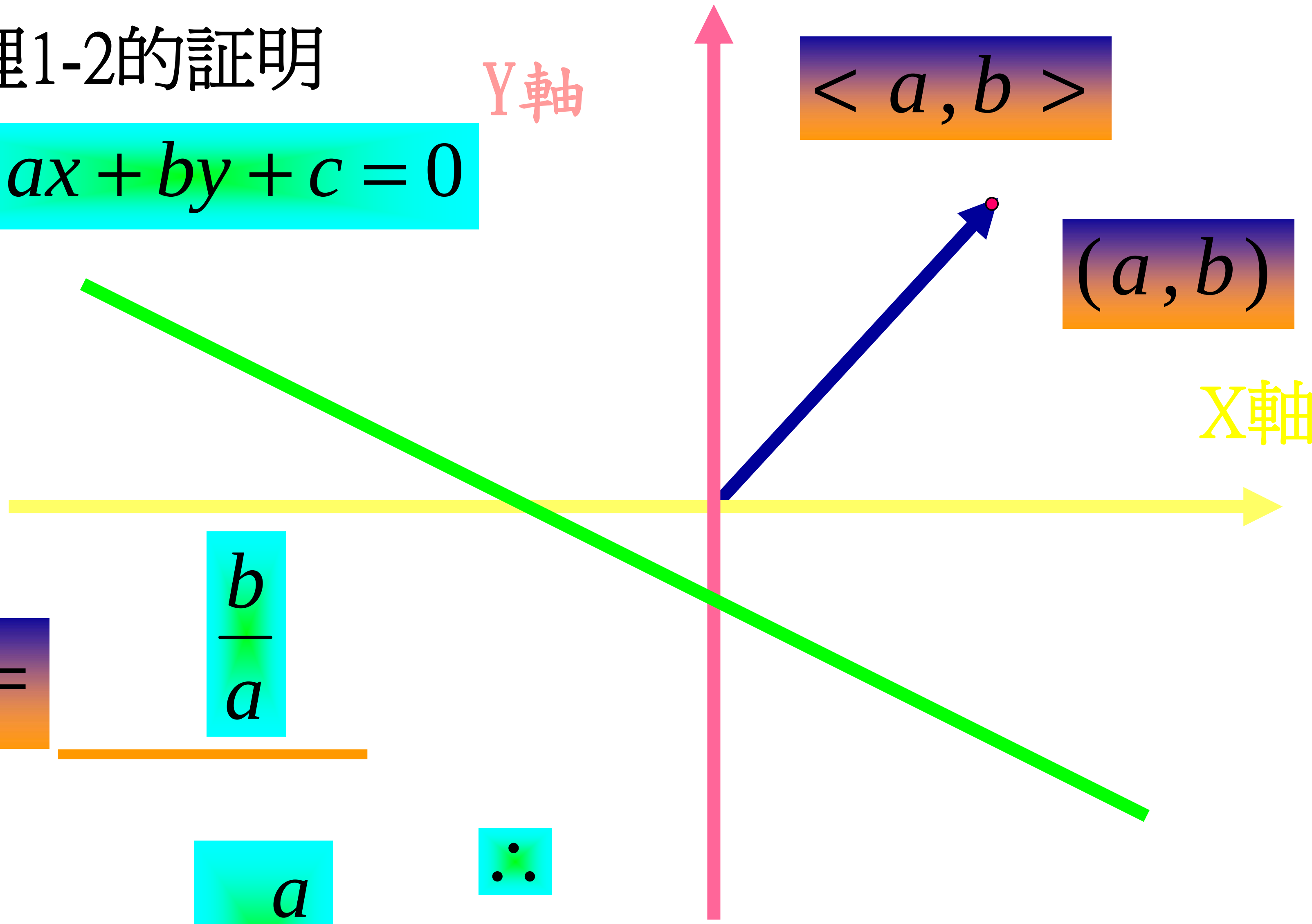
定理 1-2

若直線**L** 的方程式爲 $ax + by + c = 0$

則向量 $< a, b >$ 爲**L**的法向量

定理1-2的証明

$L: ax+by+c=0$



$m_{\vec{v}} = \dfrac{b}{a}$

$m_L = -\dfrac{a}{b}$

$\therefore$ $\langle a,b \rangle$ 為L的法向量

定理 1-2 測驗

若直線**L** 的方程式爲 $ax+by+c=0$

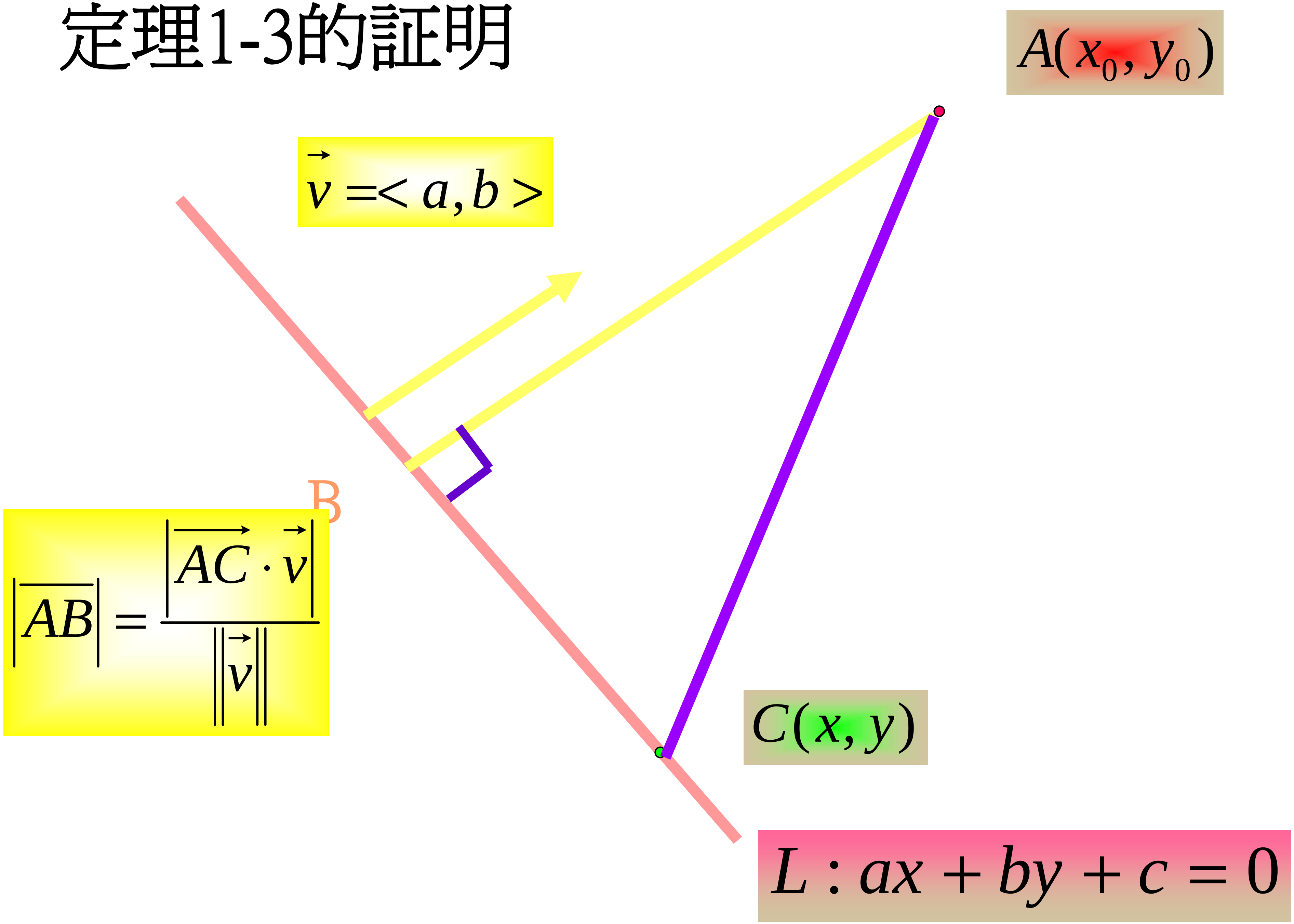
則向量 $<a,b>$ 爲**L**的法向量

定理 1-3

點 (x_0, y_0) 到直線**L:** $ax+by+c=0$

的距離爲 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

定理1-3的証明



$A(x_0, y_0)$
$\vec{v} = \langle a, b \rangle$
B
$\left|\overline{AB}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}\right|}{\left\|\vec{v}\right\|}$
$C(x, y)$
$L : ax + by + c = 0$

定理1-3的証明

$$\left|\overline{AB}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}\right|}{\left\|\vec{v}\right\|} = \frac{\left| < x - x_0, y - y_0 > \cdot < a, b > \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{\left| a(x - x_0) + b(y - y_0) \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{\left| ax - ax_0 + by - by_0 \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{\left| -ax_0 - by_0 + ax + by \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

定理1-3的証明

$$\left|\overline{AB}\right| = \frac{\left|-ax_0 - by_0 + ax + by\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{\left|-ax_0 - by_0 - c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

定理 1-3

點 (x_0, y_0) 到直線**L:** $ax + by + c = 0$

的距離爲

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

定理 1-3 的 測驗

點 (x_0, y_0) 到直線**L:** $ax+by+c=0$

的距離為

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

例題1

求點 $A(2,3)$ 到直線**L:** $3x - 4y + 2 = 0$

的距離爲 $\dfrac{|3\times 2 - 4\times 3 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|6 - 12 + 2|}{\sqrt{25}}$

$= \dfrac{|-4|}{5} = \dfrac{4}{5}$

例題 2

求兩直線 $L_1: 2x-3y-4=0$ 及

$L_2: 4x-6y-2=0$ 的距離

例題 2 之解答

$L_1: 2x-3y-4=0$

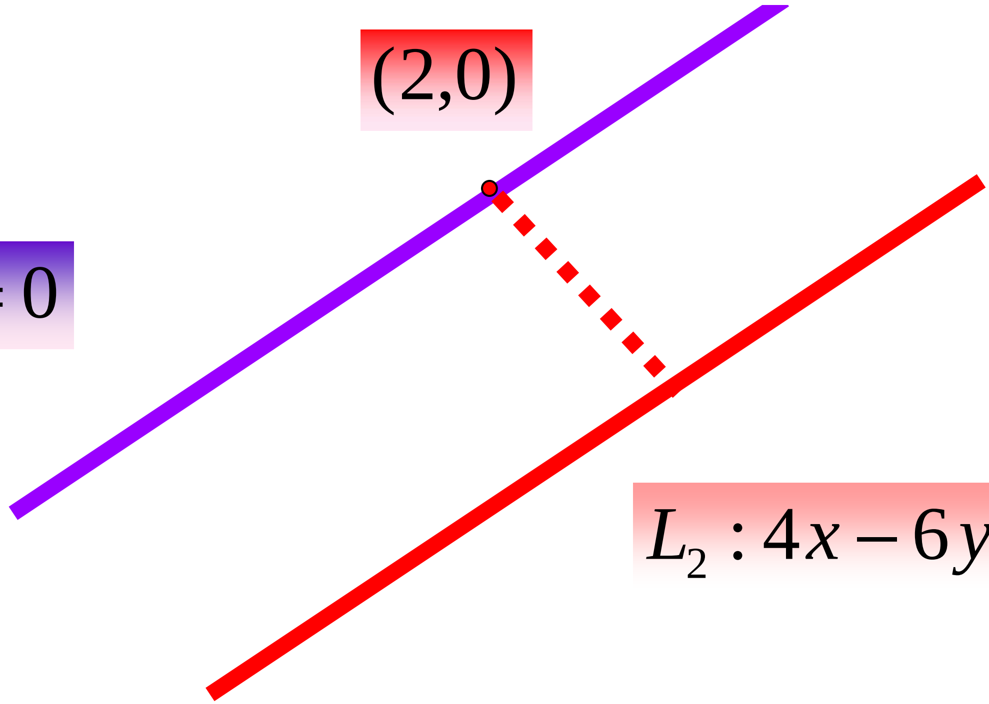
$L_2: 4x-6y-2=0$

$m_{L_1} = \underline{\frac{2}{3}}$

$m_{L_2} = \underline{\frac{2}{3}}$

任意取 L_1 上一點 ($\underline{2}$,0)

$L_1: 2x-3y-4=0$



$L_2: 4x-6y-2=0$

L_1與L_2的距離爲

$$\frac{|4\times 2-6\times 0-2|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{16+36}}$$

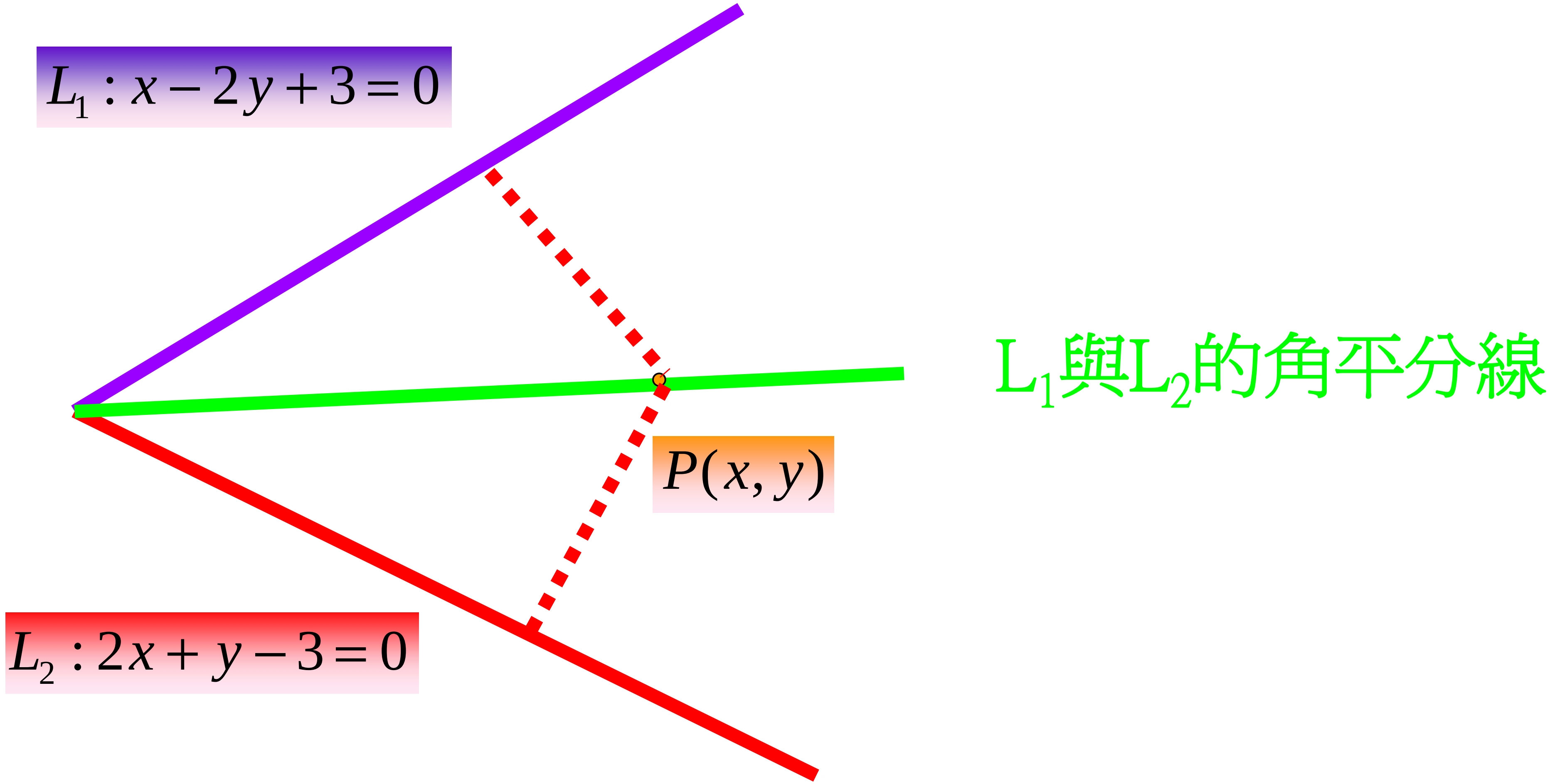
$$=\frac{6}{\sqrt{52}}=\frac{6}{\sqrt{4\times 13}}=\frac{6}{2\sqrt{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

例題 3

求兩直線 $L_1 : x - 2y + 3 = 0$ 及

$L_2 : 2x + y - 3 = 0$ 的角平分線方程式

例題 3 的解答



$P(x,y)$ 爲L_1與L_2的角平分線上任一點

P到L_1的距離=p到L_2的距離

例題 3 的解答

P到爲L_1的距離=p到L_2的距離

$$\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|x-2y+3|=|2x+y-3|$$

$$x-2y+3=\pm(2x+y-3)$$

$$L_1: x-2y+3=0$$

$$x-2y+3=\pm(2x+y-3)$$

$$L_2: 2x+y-3=0$$

$$p(x,y)$$

例題 3 的解答

$$x-2y+3=\pm(2x+y-3)$$

則 $x-2y+3=2x+y-3$

或 $x-2y+3=-(2x+y-3)$

所以 L_1與L_2的角平分線 為

$x+3y-6=0$ 或 $3x-y=0$

例題 4

試求 $L_1 : 2x - y + 4 = 0$ 及

$L_2 : 6x + 2y - 5 = 0$ 之夾角

例題 4之解答

L_1 的法向量爲 $<2,-1>$

L_2 的法向量爲 $<6,2>$

L1與L2的夾角=兩法向量的夾角:= θ

利用夾角公式

$$\cos\theta = \frac{<2,-1>\cdot<6,2>}{\|<2,-1>\|\|<6,2>\|}$$

$L_1: 2x - y + 4 = 0$

$L_2: 6x + 2y - 5 = 0$

例題 4之解答

$$\cos\theta = \frac{<2,-1>\cdot<6,2>}{\|<2,-1>\|\|<6,2>\|}$$

$$= \frac{2\times 6+(-1)\times 2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{6^2+2^2}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{5}\sqrt{40}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{10}{\sqrt{2\times 10^2}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

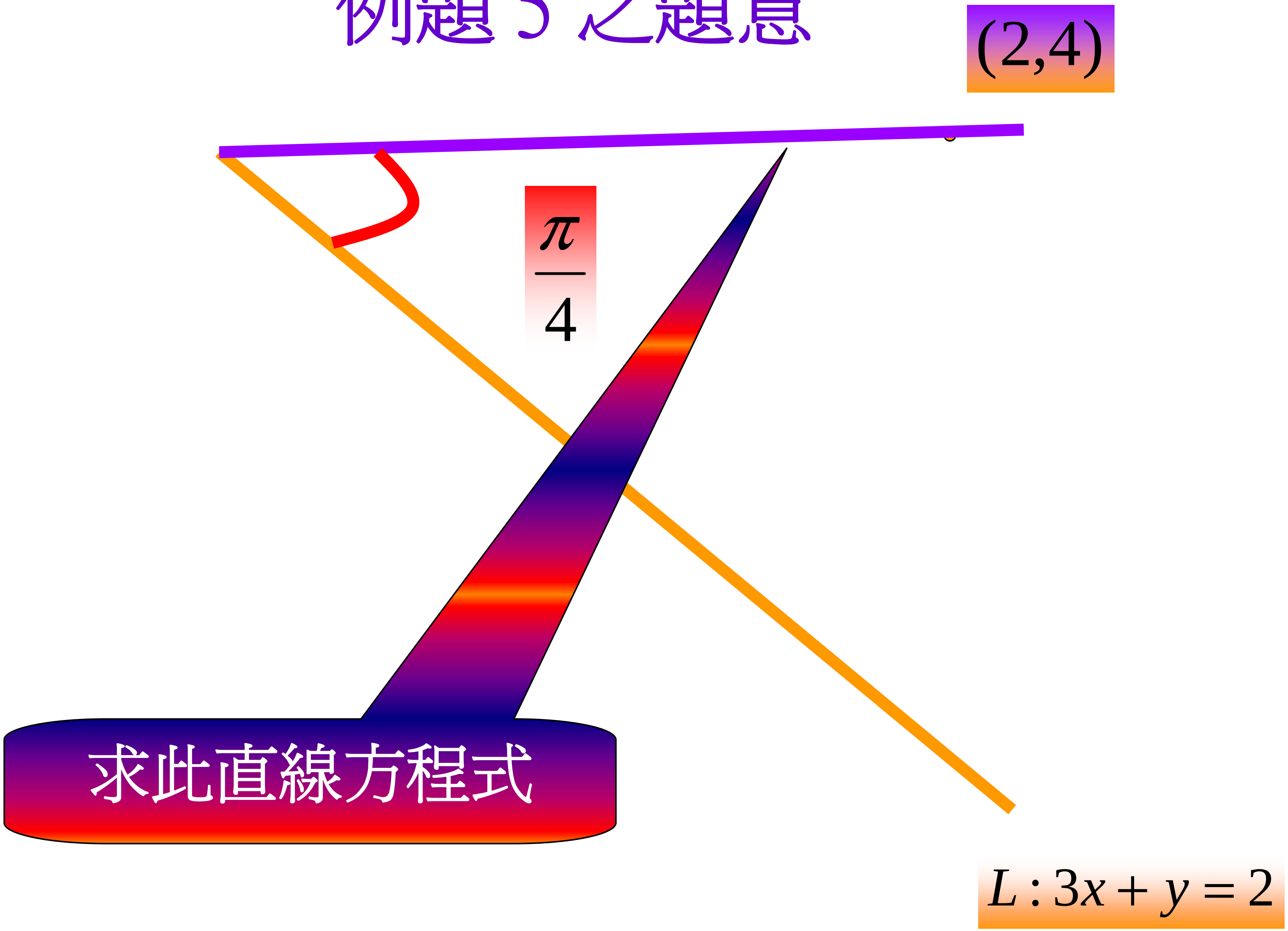
$\therefore$ $\theta = 45^\circ$ 或 $\theta = 135^\circ$

例題 5

試求通過點**(2,4)**且與直線 $L: 3x + y = 2$

之夾角為 $\dfrac{\pi}{4}$ 之直線方程式

例題 5 之題意



例題 5 之解答

設此直線方程式為 $ax + by + c = 0$

則其法向量為 $< a, b >$

$L_1 : 3x + y = 2$ 之法向量為 $< 3,1 >$

所以兩法向量的夾角為 $\dfrac{\pi}{4}$

則利用夾角公式

例題 5 之解答

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{<a,b>\cdot<3,1>}{\left\|<a,b>\right\|\left\|<3,1>\right\|}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3a+b}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{3^2+1^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(3a+b)^2}{10(a^2+b^2)}$$

例題 5 之解答

$$\frac{1}{2} = \frac{(3a+b)^2}{10(a^2+b^2)}$$

$$1 = \frac{(3a+b)^2}{5(a^2+b^2)}$$

$$5(a^2+b^2) = (3a+b)^2$$

$$5a^2+5b^2 = 9a^2+6ab+b^2$$

$$4a^2+6ab-4b^2 = 0$$

例題 5 之解答

$$4a^2 + 6ab - 4b^2 = 0$$

$$2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0$$

$$(2a - b)(a + 2b) = 0$$

$2a - b = 0$ 或 $a + 2b = 0$

$a = \dfrac{b}{2}$ 或 $a = -2b$

例題 5 之解答

$a = \frac{b}{2}$ 或 $a = -2b$

所以此直線的方程式爲

$x + 2y + c = 0$ 或 $2x - y + c = 0$

又(2,4)爲此直線上一點

則

例題 5 之解答

又(2,4)爲此直線上一點

若此直線的方程式爲 $x+2y+c=0$

則 $2+2\times4+c=0$

$c=-10$

所以此直線方程式爲 $x+2y-10=0$

例題 5 之解答

又(2,4)爲此直線上一點

若此直線的方程式爲 $2x - y + c = 0$

則 $2 \times 2 - 4 + c = 0$

$c =$ 0

所以此直線方程式爲 $2x - y = 0$